Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 10

Operatory sprzężone

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta.

Tw. (Riesz-Fréchet) Odwzorowanie $f : H \to \mathbb{F}$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym $\iff$ istnieje $y \in H$ taki, że

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ dla każdego } x \in H,$$

a ponadto, wtedy $\|f\| = \|y\|$. Czyli $H \ni y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ jest izometrycznym izomorfizmem antyliniowym: $H \overset{anty}{\cong} H^*$.

Dowód: Jeśli $f(x) := \langle x, y \rangle$, $x \in H$, dla pewnego $y \in H$, to $f \in H^*$ oraz $\|f\| = \|y\|$ (patrz dowód Stwierdzenia z Wykładu 7). Zatem $H \ni y \longmapsto \langle \cdot, y \rangle \in H^*$ izometria, która jest antyliniowa, bo iloczyn skalarny jest antyliniowy ze względu na drugą współrzędną.

Niech teraz $f \in H^*$ dowolny. Możemy założyć, że $f \neq 0$, bo jeśli $f \equiv 0$, to $f(x) = \langle x, 0 \rangle$ dla $x \in H$. Wtedy $M := \ker f \neq H$ i stąd $\{0\} \neq M^\perp \subseteq H$. Co więcej twierdzimy, że $\dim(M^\perp) = 1$.

Rzeczywiście,

jeśli $y_1, y_2 \in M^{\perp} \setminus \{0\}$, to $f(y_1), f(y_2) \neq 0$ i dla $\lambda := \frac{f(y_2)}{f(y_1)} \in \mathbb{F}$

$$f(\lambda y_1 - y_2) = \lambda f(y_1) - f(y_2) = f(y_2) - f(y_2) = 0.$$

Czyli $\lambda y_1 - y_2 \in \ker f = M$. Ale z drugiej strony $\lambda y_1 - y_2 \in M^{\perp}$. Zatem $y_2 = \lambda y_1$, bo $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Stąd $\dim(M^{\perp}) = 1$.

Weźmy dowolny $y_0 \in M^{\perp}$ taki, że $\|y_0\| = 1$. Wtedy dla $x \in H$ mamy $P_{M^{\perp}}x = \langle x, y_0 \rangle y_0$ (bo $M^{\perp} = \{\lambda y_0 : \lambda \in \mathbb{F}\}$) i stąd

$$f(x) = f(P_M x + P_{M^{\perp}}x) = f(P_M x) + f(P_{M^{\perp}}x) = 0 + f(\langle x, y_0 \rangle y_0)$$
$$= \langle x, y_0 \rangle f(y_0) = \langle x, \overline{f(y_0)} y_0 \rangle.$$

Czyli kładąc $y := \overline{f(y_0)} y_0$ mamy $f(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in H$. ■

Wn. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą. Każdy ograniczony funkcjonał liniowy $f : L^2(\mu) \to \mathbb{F}$ jest postaci

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t) y(t) \, d\mu, \qquad x \in L^2(\mu),$$

gdzie $y \in L^2(\mu)$. Ponadto wtedy $\|f\| = \left(\int_{\Omega} |y(t)|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|y\|_2$.

Tw. Jeśli $T : H \to K$ jest ograniczonym operatorem liniowym między dwoma przestrzeniami Hilberta H i K, to istnieje dokładanie jedna funkcja $T^* : K \to H$ taka, że

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad \text{dla } x \in H,\ y \in K. \tag{1}$$

Ponadto, $T^* \in B(K, H)$ oraz $\|T^*\| = \|T\|$ i $(T^*)^* = T$.

Def. T^* nazywamy **operatorem sprzężonym** do $T \in B(H, K)$.

Dowód: Dla ustalonego $y \in K$ funkcja $f(x) := \langle Tx, y\rangle$, $x \in H$, jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na H. W szczególności,

$$|f(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leqslant \|Tx\| \cdot \|y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|,$$

skąd $\|f\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$. Zatem na mocy **Tw.** (Riesz-Fréchet) istnieje dokładnie jeden wektor w H, oznaczmy go przez T^*y, taki, że $f(x) = \langle x, T^*y\rangle$, $x \in H$, czyli $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ dla $x \in H$. Ponadto wtedy $\|T^*y\| = \|f\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$. To dowodzi istnienia i jednoznaczności funkcji $T^* : K \to H$ spełniającej (1).

T^* jest operatorem liniowym, bo dla $y_1, y_2 \in K$, $\lambda \in \mathbb{F}$ oraz $x \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle = \langle Tx, \lambda y_1 + y_2\rangle &= \overline{\lambda}\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle x, T^* y_1\rangle + \langle x, T^* y_2\rangle \\ &= \langle x, \lambda T^* y_1\rangle + \langle x, T^* y_2\rangle = \langle x, \lambda T^* y_1 + T^* y_2\rangle.\end{aligned}$$

Stąd $T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^* y_1 + T^* y_2$. Z otrzymanej wcześniej nierówności $\|T^* y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$ wynika, że $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.
Żeby wykazać nierówność przeciwną zauważmy, że sytuacja jest symetryczna i możemy zamienić T i T^* rolami. Dokładniej,

$$\langle T^* x, y\rangle = \overline{\langle y, T^* x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle,$$

skąd $(T^*)^* = T$ i w szczególności $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leqslant \|T^*\|$. ■

Prz. Jeśli $H = \mathbb{F}^n$ i $K = \mathbb{F}^m$, to dla $A = [a_{i,j}]_{i=1,j=1}^{m,n} \in B(H, K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nm}} \end{pmatrix}$$

Stw. (Własności sprzężenia) $T, S \in B(H,K)$, $R \in B(K,L)$

1. inwolucja: $(T^*)^* = T$;
2. antyliniowość: $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;
3. antymultiplikatywność: $(RT)^* = T^* R^*$;
4. C^*-równość: $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

Dowód: Własność (a) wykazaliśmy w poprzednim Twierdzeniu.

(b). $\langle(\alpha T + \beta S)x, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle + \beta\langle Sx, y\rangle = \alpha\langle x, T^*y\rangle + \beta\langle x, S^*y\rangle$

$$= \langle x, \overline{\alpha}T^*\rangle + \langle x, \overline{\beta}S^*y\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*)y\rangle.$$

(c) $\langle RTx, y\rangle = \langle Tx, R^*y\rangle = \langle x, T^*R^*y\rangle$.

(d). Zauważmy, że $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|T\|$ (bo norma operatorowa jest submultiplikatywna) i skoro $*$ jest izometrią, to $\|T^*T\| \leqslant \|T\|^2$. Z drugiej strony dla $h \in H$ mamy

$$\|Th\|^2 = \langle Th, Th\rangle = \langle h, T^*Th\rangle \overset{\text{Schwartz}}{\leqslant} \|h\|\|T^*Th\| \leqslant \|T^*T\|\|h\|^2$$

Stąd $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|$. ■

Lem. Dla $U : H \to K$ następujące warunki są równoważne:

1. U jest izometrią,
2. U zachowuje iloczyn skalarny,
3. $U^* U = 1$.

Dowód: (1)$\Longrightarrow$(2). Jeśli U jest izometrią, to na mocy wzorów polaryzacyjnych dla dowolnych $x, y \in H$ (oraz np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

$$\langle Ux, Uy\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|Ux + i^k Uy\|^2 = \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|U(x + i^k y)\|^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 = \langle x, y\rangle.$$

(2)$\Longrightarrow$(3). Dla dowolnych $x, y \in H$ mamy

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle x, U^* Uy\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle x, U^* Uy - y\rangle = 0.$$

Kładąc $x := U^* Uy - y$ dostajemy $U^* Uy = y$. Czyli $U^* U = 1$.

(3)$\Longrightarrow$(1). Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^* Ux\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2. \quad \blacksquare$$

Wn. U jest operatorem unitarnym (odwracalną izometrią) wtedy i tylko wtedy, gdy $U^*U = UU^* = 1$.

Dowód: Jeśli $U^*U = UU^* = 1$, to U odwracalna izometria, gdzie $U^* = U^{-1}$, a więc U unitarny. Jeśli U unitarny, to $U^*U = 1$, bo U jest izometrią, i stąd $U^{-1} = 1U^{-1} = U^*UU^{-1} = U^*$, czyli $U^*U = UU^* = 1$. ■

Charakteryzacje operatorów za pomocą operacji algebraicznych

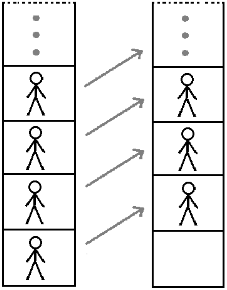
Relacje	Nazwa operatora
$T = T^*$	**samosprzężony**
$TT^* = T^*T$	**normalny**
$P^2 = P,\ P = P^*$	**rzut ortogonalny**
$U^*U = 1$	**izometria**
$U^*U = UU^* = 1$	**unitarny**

Uw. Operator unitarny = „normalna izometria”.

Prz. (klasyczny jednostronny operator przesunięcia)

Operator $U : \ell^2 \to \ell^2$ dany wzorem

$$U(x(1), x(2), x(3), \dots) := (0, x(1), x(2), \dots)$$



jest izometrią U, ale nie jest operatorem unitarnym, bo $UH = \{x \in \ell^2 : x(1) = 0\} \neq H$. Ponadto

$$U^*(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), \dots),$$

bo

$$\begin{aligned}\langle Ux, y\rangle &= \langle (0, x(1), x(2), x(3), \dots), (y(1), y(2), y(3), \dots)\rangle \\ &= 0 \cdot \overline{y(1)} + x(1)\overline{y(2)} + x(2)\overline{y(3)} + \dots \\ &= \langle (x(1), x(2), x(3), \dots), (0, y(2), y(3), \dots)\rangle = \langle x, U^* y\rangle.\end{aligned}$$

W szczególności, $\ker U^* = \{x \in \ell^2 : x = (x(1), 0, 0, \dots)\} \neq \{0\}$ i

$$U^*U = 1, \qquad UU^* = P_{UH} = 1 - P_{\ker U^*} \neq 1.$$

Uw. $UU^* = P_{UH} = 1 - P_{\ker U^*}$ dla dowolnej izometrii U